16.02.16.

Πρόταση: Σε τυχόντα μετρικό χώρο (E,ρ), όπου ρ μετρική, ισχύουν τα εξής: $(\forall x,y,z,w\in E)$

i) $\rho(x,y)\geq 0$

ii) $|\rho(x,y)-\rho(z,w)|\leq \rho(x,z)+\rho(y,w)$

iii) $|\rho(x,z)-\rho(z,y)|\leq \rho(x,y)$

Απόδειξη

(i) Είναι, $\rho(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)+\rho(x,y)}{2}$

$$=\frac{\rho(x,y)+\rho(y,x)}{2}\geq\frac{\rho(x,x)}{2}=\frac{0}{2}=0.$$

(ii) Είναι, $\rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(z,w)+\underbrace{\rho(w,y)}$

$\Rightarrow \rho(x,y)-\rho(z,w)\leq \rho(x,z)+\rho(y,w)$ (1)

Ακόμη, $\rho(z,w)\leq \underline{\rho(z,x)}+\rho(x,y)+\rho(y,w)$

$\Rightarrow \rho(z,w)-\rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(y,w)$ (2)

Από ①, ② $|\rho(x,y)-\rho(z,w)| \leq \rho(x,z)+\rho(y,w)$

(iii) Με χρήση της ii) έχω

$|\rho(x,z)-\rho(z,y)| = |\rho(x,z)-\rho(y,z)|$

$\leq \rho(x,y) + \underbrace{\rho(z,z)}_{0} = \rho(x,y)$

• Στάθμες – Μετρικές στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

Στάθμες:

Έστω $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $(x_i \in \mathbb{R})$

Οι παρακάτω συναρτήσεις, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, είναι στάθμες

∘ $|\ | : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, με $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

∘ $N_1(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, με $N_1(\bar{x}) = max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$

∘ $N_2(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, με $N_2(\bar{x}) = |x_1| + \ldots + |x_n|$

Απόδειξη (Χρήση ορισμού στάθμης - άμεσες)
(i, ii, iii)

Έτσι, οι:

$$\rho(x,y) = |\bar{x}-\bar{y}| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

$$\rho_1(x,y) = N_1(\bar{x}-\bar{y}) = \max\{|x_1-y_1|, \dots, |x_n-y_n|\}$$

$$\rho_2(x,y) = N_2(\bar{x}-\bar{y}) = |x_1-y_1| + \dots + |x_n-y_n|$$

, αποτελούν μετρικές στον $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση: Έστω $\rho : E\times E \to \mathbb{R}$, μετρική σε χώρο E.

Τότε $\tau : E\times E \to \mathbb{R}$, με $\tau(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$,

είναι επίσης μια μετρική στον E.

(Μάλιστα αφού $\rho(x,y) < 1 + \rho(x,y)$, έχω ότι $\tau(x,y) < 1$, άρα έχω μια φραγμένη άνω μετρική.)

Απόδειξη:

Είναι, $\tau(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} = \dfrac{\rho(y,x)}{1+\rho(y,x)} = \tau(y,x)$ ①

Είναι, $\tau(x,y) = 0 \iff \rho(x,y) = 0 \iff x = y$ ②

Είναι, $\tau(x,z) + \tau(z,y) = \dfrac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)} + \dfrac{\rho(z,y)}{1+\rho(z,y)}$

$$\geq \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)} + \frac{\rho(z,y)}{1+\rho(z,y)+\rho(x,z)}$$

$$= \frac{\rho(x,z)+\rho(z,y)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\rho(x,z)+\rho(z,y)}+1}$$

$$\geq \frac{1}{\dfrac{1}{\rho(x,y)}+1} = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} = \tau(x,y)$$ ③

①,②,③ $\Longrightarrow$, άρα τ μετρική στον E

Απόσταση συνόλων

Έστω $A, B \subset E$, μη κενά, με $\rho: E \times E \to \mathbb{R}$ μετρική

Ορίζω ως απόσταση των συνόλων A, B τον <u>πραγματικό αριθμό</u>

$$(A,B) := \inf\{\rho(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} : \alpha \in A \wedge \beta \in B\}$$

Το σύνολο $\{\rho(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} : \alpha \in A \wedge \beta \in B\}$ είναι

μη κενό ($A, B \neq \emptyset$, άρα μεταξύ δυο τουλάχιστον στοιχείων με $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, $\exists\ \rho(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}$), και κάτω φραγμένο, μιας και $\forall\ \rho(\alpha,\beta)$ ισχύει $\rho(\alpha,\beta) \geq 0$.
Άρα από το αξίωμα της πληρότητας στο $\mathbb{R}$, το παραπάνω σύνολο έχει infimum, το οποίο και ορίζω ως απόσταση A, B.

Απόσταση σημείου από σύνολο

Θεωρώ το <u>σημείο μου</u> ως <u>μονοσύνολο του εαυτού του</u>, και εφαρμόζω την παραπάνω πρόταση, πλέον μεταξύ συνόλων.

Πρόταση: Έστω $A, B \subset E$, μη κενά, με

$\rho : E \times E \to \mathbb{R}$ μετρική και $A \cap B \neq \emptyset$

Τότε $\rho(A, B) = 0$

Απόδειξη:

Έστω $z \in A \cap B$, δηλ $z \in A \land z \in B$.
Εξ' ορισμού έχω:

$$\rho(A,B) = \inf\{\rho(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} : \alpha \in A \land \beta \in B\}$$

$\leq \rho(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \ \forall \alpha \in A \land \beta \in B$, άρα και για το $z \in A \cap B$.

Δηλαδή $\inf\{\rho(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} : \alpha \in A \land \beta \in B\} \leq \rho(z,z) = 0$. (1)

Όμως ρ μετρική $\Rightarrow \rho(x,y) \geq 0 \ \forall x,y \in E$, άρα και για το παραπάνω infimum αποστάσεων. (2)

Από (1), (2) $\inf\{\rho(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} : \alpha \in A \land \beta \in B\} = 0 = \rho(A,B)$